Matematičko informatički obrazovni centar
"Vladimir Popović"
Jordanovac 8, Zagreb

Maturalna radnja iz fizike

ELEKTRIČNO POLJE

Izradio:
Antonio Šiber 4.h

Mentor:
prof Gordana Zovko

SADRŽAJ

Električno polje 1

Veza sa kompjuterskim radom 2

Silnice (linije sile) 3

Influencija 4

Polarizacija 5

Elektrostatska potencijalna energija i izvod izraza za potencijal 5

Potencijal 9

Potencijalna razlika ili napon 10

Veza sa kompjuterskim radom 11

Gradijent potencijala 13

Matematički dodatak 13

Ekvipotencijalne plohe 15

Slike električnog polja točkastih naboja 16

Popis literature

UVOD

Cilj ovog rada je bila definicija električnog polja i nekih veličina karakterističnih za to polje:

- jakost električnog polja,
- elektrostatska potencijalna energija,
- potencijal,
- napon.

Takodjer su uključene i neke pojave u električnom polju:
- influencija,
- polarizacija.

I grafički prikaz polja pomoću:
- silnica,
- ekvipotencijalnih ploha,

što je i kompjuterska podrška radu.

Na kraju radu su priložene slike električnog polja više točkastih naboja dobijene tim programom.

ELEKTRIČNO POLJE

Kaže se da u nekoj točki prostora postoji električno polje ako sila električnog porijekla djeluje na nabijeno tijelo postavljeno u tu točku. Na kakvu silu koja se može opaziti kada je neko tijelo nabijeno ,a koja ne postoji kada je ono nenabijeno smatramo električnom silom.Brojna vrijednost polja u nekoj točki definira se kao količnik dobijen kada se sila koja djeluje na probni naboj u toj točki,podijeli sa količinom naboja q' probnog tijela.

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q'} \qquad (1)$$

Sila $\vec{F}$ je vektorska veličina,pa i jakost električnog polja ima vektorski karakter.Električno polje u nekoj točki ima isti pravac i smjer kao i sila koja djeluje na pozitivni probni naboj postavljen u tu točku.Sila koja djeluje na negativni naboj suprotna je od smjera polja.

Ovakva definicija polja ima jedan nedostatak.Naime,unošenjem probnog naboja u neko električno polje,ono se nužno mijenja.Naboji se preraspodjeljuju tako da se novi sustav(sastavljen od probnog naboja i ostalih naboja u prostoru,od kojih električno polje i potječe) nađe u stanju najmanje elektrostatske potencijalne energije.

Ovaj definicijski problem se rješava postuliranjem:

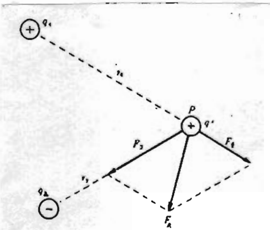
1.Da se naboji koji uspostavljaju polje ne pomjeraju zbog prisustva probnog naboja

ili

2.Da će biti upotrijebljen infinitenzimalni probni naboj (dq) koji neće prouzročiti preraspodjelu naboja od kojih električno polje i potječe.

Postulat 2. opet ima nedostatak jer je najmanji primijećeni naboj u prirodi $1.6 \cdot 10^{-19}$ C (naboj jednog elektrona).

Električno polje u nekoj točki prostora možemo izračunati vektorskim zbrajanjem jakosti električnih polja od svih naboja u prostoru.



VEZA SA KOMPJUTERSKIM RADOM

Ako polje potječe od točkastih naboja, primjenom Coulombova zakona za silu na probni naboj q' dobijamo:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

$$\vec{F}_R = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q'}{r_1^2} + k \cdot \frac{Q_2 \cdot Q'}{r_2^2} + k \cdot \frac{Q_3 \cdot Q'}{r_3^2} + k \cdot \frac{Q_4 \cdot Q'}{r_4^2} + \ldots + k \cdot \frac{Q_n \cdot Q'}{r_n^2}$$

$$\vec{F}_R = k \cdot Q' \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i^2}$$

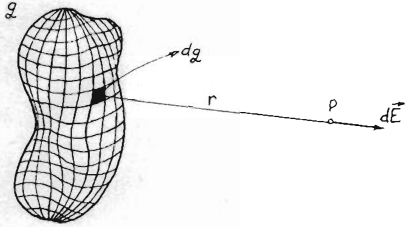
$\vec{F}_R$ -rezultirajuća sila
q'-probni naboj

Pa je: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_R}{Q'}$

$$\vec{E} = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i^2} \qquad \text{(vektorski zbroj)} \qquad (2)$$

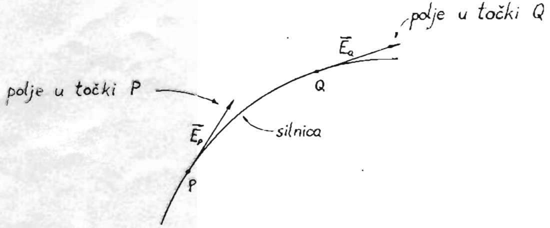
Ako naboji od kojih potječe polje nisu točkasti nego su raspoređeni na tijelima konačnih veličina,naboji se mogu izdijeliti u infinitenzimalne elemente dq ,pa će uopćenje jednadžbe (2) glasiti:

$$\vec{E} = k \cdot \int_q \frac{dq}{r^2} \qquad (3)$$



SILNICE (linije sile)

Pojam silnica uveo je Michael Faradey kao pomoć u vizualnom predstavljanju električnih polja.Silnica je zamišljena linija povučena na takav način da je njen pravac u nekoj točki (tj. pravac njene tangente) isti kao i pravac polja u toj točki.



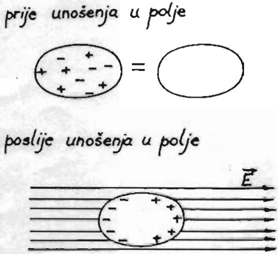
Silnice su glatke,neprekidne krivulje izuzev u točkama u kojim se nalaze naboji i u kojim je jakost električnog polja nula.Slika silnica ne govori nam o jakosti električnog polja.U bilo kojoj točki električnog polja , polje može imati samo jedan pravac.Prema tome, samo jedna silnica može prolaziti kroz svaku točku polja.Drugim riječima,silnice se nikad ne sijeku.Kad bi se silnice sjekle onda bismo u točki njihovog presjeka mogli konstruirati dva vektora električnog polja,tangente na krivulje.

Silnice izviru u pozitivnim nabojima a završavaju u negativnim nabojima ili u beskonačnosti tj. realno u prostoru gdje nema polja.

POJAVE U ELEKTRIČNOM POLJU

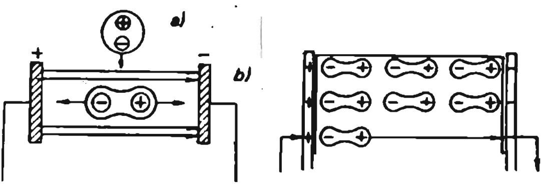
Influencija

Unošenjem nenabijenog vodiča u električno polje, u njemu dolazi do preraspodjele naboja.Slobodni elektroni u vodiču gibaju se pod utjecajem sile električnog polja raspodjeljujući se tako da elektrostatska energija tijela (vodiča) bude najmanja.U vodiču se razdvoje pozitivni i negativni naboji, ali ukupna količina naboja ostaje nula jer nikakav naboj nismo tijelu doveli, niti smo ga sa njega odveli.Ova pojava naziva se INFLUENCIJA.



Polarizacija

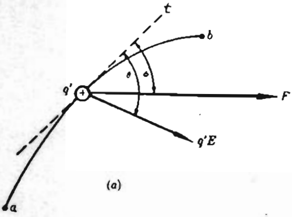
U nevodljivim tvarima normalno nema slobodnih elektrona.Ako se takvi materijali unesu u električno polje, u njima se ne mogu influencijom razdvajati raznoimeni naboji već, umjesto toga, dolazi do određenog razmještanja naboja unutar atoma i molekula.Pod utjecajem vanjskog električnog polja, putanje elektrona koji kruže oko jezgre atoma razvuku se na stranu suprotnu smjeru vanjskog polja, a jezgre se premjeste u smjeru polja.Takvi atomi, gledani iz neposredne blizine, nisu više električki neutralni.Ova se pojava naziva polarizacija elektrona. Promatrajući istu pojavu na nivou molekula, molekularnih skupina , govorimo,općenito, o POLARIZACIJI.



a) „normalna" molekula b) polarizirana molekula

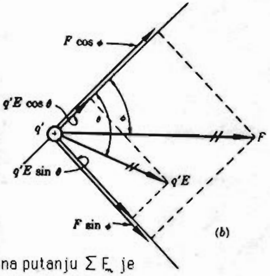
ELEKTROSTATSKA POTENCIJALNA ENERGIJA i IZVOD IZRAZA ZA POTENCIJAL

Ovdje ne mislim na elektrostatsku energiju sustava naboja, već na energiju jednog naboja koji se nalazi u električnom polju $\vec{E}$ koje može potjecati od bilo kakve raspodjele naboja.
Kad kažemo da neko tijelo ima potencijalnu energiju to znači da to tijelo može izvršiti rad količinski jednak svojoj potencijalnoj energiji uz djelovanje neke sile kao posrednika pri pretvorbi energije iz jednog oblika u drugi.U električnom polju, sila koja prouzročuje tu pretvorbu je električna sila $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$ (kao što je u gravitacijskom polju to gravitacijska sila $\vec{F}=m\cdot\vec{g}$ ->uočite analogiju).



(a)

Na slici je predstavljen prostor u električnom polju jakosti $\vec{E}$ u kojem vanjskom silom $\vec{F}$ pomjeramo naboj q' po putanji ab.Pravac t je tangenta na putanju.Sila kojom električno polje $\vec{E}$ djeluje na naboj q' predstavljena je vektorom $q' \cdot \vec{E}$.



(b)

Rezultirajuća sila, okomita na putanju $\sum F_n$ je

$$\sum F_n = F \cdot \sin\phi + q' \cdot E \cdot \sin\theta$$

Rezultirajuća tangencijalna sila $\sum F_t$ je

$$\sum F_t = F \cdot \cos\phi + q' \cdot E \cdot \cos\theta$$

Sila okomita na putanju je centripetalna sila.Ona mijenja smjer brzine naboja, ali ne i vrijednost brzine.
Tangencijalna sila daje naboju akceleraciju duž putanje ab.

Primjenjujući II Newtonov zakon ($\sum F_{sp} = m \cdot a$) imamo:

$$F\cos\phi + q' \cdot E \cdot \cos\Theta = m \cdot a$$

gdje je m masa naboja q .
Primjenjujući definicijski izraz za akceleraciju $a = \frac{dv}{dt}$ imamo

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \frac{dv}{ds}$$

gdje je ds infinitenzimalno mali dio puta duž putanje ab.
Sad imamo:

$$F\cos\phi + q' \cdot E \cdot \cos\Theta = m \cdot v \cdot \frac{dv}{ds} \quad / \cdot ds$$

$$F\cos\phi \cdot ds + q' \cdot E \cdot \cos\Theta \cdot ds = m v \cdot dv$$

ili

$$F \cdot \cos\phi \cdot ds = m v dv - q' \cdot E \cdot \cos\Theta \cdot ds \qquad (4)$$

Član $F\cos\phi ds$ predstavlja rad dW koji vanjska sila F izvrši nad nabojem q' pri pomjeranju ds.

$$dW = F \cdot \cos\phi \cdot ds$$

Član mvdv moze se zapisati kao $d(\frac{1}{2} mv^2)$ te on predstavlja povećanje kinetičke energije naboja, $d(E_k)$

$$d(E_k) = m v dv = d(\tfrac{1}{2} m v^2)$$

Posljednji član $-q' \cdot E \cdot \cos\Theta ds$ predstavlja rad izvršen nasuprot električne sile $q' \cdot \vec{E}$, kojom polje $\vec{E}$ djeluje na naboj q' .Predznak "-" ukazuje da je rad izvršen nasuprot električne sile.Prema tome, ovaj član predstavlja povećanje potencijalne energije naboja $d(E_p)$.
(Možemo uočiti analogiju sa gravitacijskim poljem.Kada masu M dižemo, dakle vršimo rad nasuprot gravitacijske sile $M \cdot \vec{g}$, povećavamo joj potencijalnu energiju.)

$$d(E_p) = -q' \cdot E \cdot \cos\Theta \cdot ds$$

Jednadžba (4) može se onda zapisati kao:

$$dW = d(E_k) + d(E_p)$$

Ona kaže da je rad utrošen na povećanje kinetičke i potencijalne energije naboja q' .

Integrirajući jednadžbu (4) duž putanje ab imamo.

$$\int_a^b F\cos\phi ds = \int_{v_a}^{v_b} mvdv - \int_a^b q' \cdot E\cos\theta ds$$

Ukupni rad od a do b je onda:

$$W = \int_a^b F\cos\phi ds$$

Drugi integral može se izračunati bez obzira na promjenu sile F

$$\int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = E_{kb} - E_{ka}$$

Ovaj integral predstavlja ukupno povećanje kinetičke energije naboja q' duž ab.

Posljednji integral predstavlja ukupno povećanje potencijalne energije.

$$-\int_a^b q' \cdot E\cos\theta ds = E_{pb} - E_{pa} \qquad (5)$$

U specijalnom slučaju kad je vanjska sila jednaka nuli i naboj se giba jedino pod utjecajem sile koja potječe od polja, prvi integral je jednak nuli, pa imamo:

$$0 = E_{kb} - E_{ka} + E_{pb} - E_{pa}$$

ili

$$E_{kb} + E_{pb} = E_{ka} + E_{pa} = konst.$$

a to je zakon o očuvanju energije.

Jednadžba (5) je opći izraz za razliku između potencijalnih energija probnog naboja q' u točkama a i b električnog polja.Da bismo mogli govoriti o potencijalnoj energiji točke u polju, nužno je odabrati neki referentni nivo, točku u kojoj je potencijalna energija nula.
(Ovdje se radi o dogovoru.U gravitacijskom polju je to morski nivo. Naravno u ovom našem gravitacijskom sustavu se zanemaruju utjecaji drugih planeta osim Zemlje, pa je ovakav izbor sasvim opravdan.)
Zbog matematičke jednostavnosti tu točku odabiremo u beskonačnosti.
Uzmemo li da je tocka a u beskonačnosti i da je $E_{pa}=0$ imamo iz (5)

$$E_{pb} = -\int_{\infty}^{b} q' \cdot E\cos\Theta ds$$

ili

$$E_p = -\int q' \cdot E\cos\Theta ds$$

Potencijalna energija naboja u nekoj točki električnog polja jednaka je radu izvršenom nasuprot sile kojom polje djeluje na naboj kad se on prenese iz beskonačnosti u tu točku.
(Ovdje je fizikalni smisao beskonačnosti prostor u kojem nema polja)

Potencijal

Potencijal u nekoj točki električnog polja definira se kao odnos potencijalne energije naboja q' (probnog naboja) prema količini naboja q'.
Potencijal je karakteristika polja i ne ovisi o probnom naboju q'.
To je skalarna veličina jer je i energija takvog karaktera.

$$\varphi = \frac{E_p}{q'} = \frac{-\int q' \cdot E \cdot \cos\Theta \cdot ds}{q'}$$

$$\varphi = -\int E \cdot \cos\Theta \cdot ds$$

Ovu jednadžbu možemo zapisati i u obliku skalarnog produkta vektora:

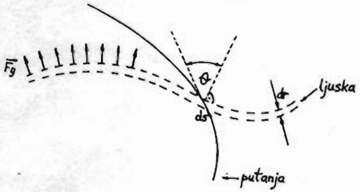
$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Potencijal u nekoj tocki električnog polja jednak je radu izvršenom po jedinici naboja nasuprot sile električnog polja kad se naboj prenese iz beskonačnosti u tu točku.Potencijal od 1J/1C naziva se 1V (volt)*

Treba napomenuti da potencijal φ ne ovisi o putu kojim naboj q' dovodimo iz beskonačnosti u neku točku polja.Možemo konstruirati ljusku u polju po čijoj je čitavoj povrsini električno polje jednake jakosti i okomito na ljusku, pa je i sila na naboj koji dovodimo ista takva ($\vec{F}=\vec{E}\cdot q'$).
Svaka staza mora prolaziti niz takvih ljusaka debljine dr.

*Alessandro Voltae, italijanski fizicar

Rad koji uložimo da pomjerimo naboj "kroz" jednu takvu ljusku je neovisan o obliku putanje i iznosi $dW=F_y \cdot dr$ (slika).



$dW=F_y \cdot ds\cos\theta=F_y \cdot dr$ ->neovisno o kutu θ

Onda i rad koji ulozimo da prođemo n takvih ljusaka (ne istih, jer se sa infinitenzimalnom promjenom r mijenja i oblik ljuske) mora biti neovisan o obliku putanje.Iz definicije potencijala onda slijedi da je i potencijal točke neovisan o načinu na koji probni naboj q' dovodimo iz beskonačnosti u tu točku polja, tj. krivuljni integral

$$-\int \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

je neovisan o putu s.

Potencijalna razlika ili napon

Potencijalna razlika ili napon izmedu dvije točke električnog polja je razlika izmedu potencijala u tim dvjema točkama.
Dijeljenjem jednadžbe (5) sa q' imamo:

$$\frac{E_{pb}}{q'} - \frac{E_{pa}}{q'} = -\int_a^b E \cdot \cos\theta \cdot ds$$

tj.

$$\varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b E\cos\theta ds \qquad (6)$$

Napon izmedu točaka a i b jednak je radu izvršenom po jedinici naboja nasuprot električnih sila kad se naboj prenese iz a u b.

$U = napon = \varphi_b - \varphi_a$

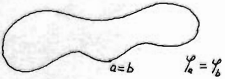
Ukoliko je razlika $\varphi_b - \varphi_a$ pozitivna , onda kažemo da je tocka b na višem potencijalu od točke a.Ako je razlika $\varphi_b - \varphi_a$ negativna kažemo da je točka b na nižem potencijalu od točke a.
Ako točku b smjestimo u točku a (a=b) onda je $\varphi_b = \varphi_a$ tj. $\varphi_b - \varphi_a = 0$ pa iz (6) imamo:

$$\oint E\cos\theta ds = 0$$

ili

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Simbol $\oint$ govori da se linijski integral uzima po zatvorenoj putanji.



VEZA SA KOMPJUTERSKIM RADOM

Jakost električnog polja usamljenog točkastog naboja je

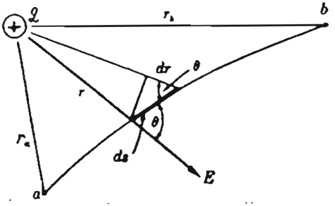
$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$$

gdje je r udaljenost točke u kojoj izračunavamo jakost električnog polja i točke u kojoj se nalazi naboj.(vidi prethodnu vezu sa kompjuterskim radom)

Jednadzba (6) glasi:

$$\varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b E\cos\theta ds$$

Na kratkom pomaku ds duž putanje ab rastojanje r poveća se za dr. Sa slike se vidi da je $dr = ds\cos\theta$



Jednadžba (6) onda postaje:

$$\varphi_b - \varphi_a = -\int_{r_a}^{r_b} k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dr =$$

$$= -k \cdot Q \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -k \cdot Q \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_a}^{r_b} =$$

$$= k \cdot \frac{Q}{r_b} - k \cdot \frac{Q}{r_a}$$

Kad je $r_a = \infty$ i $\varphi_a = 0$ (ista konvencija kao kod definicije jačine električnog polja u točki)

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}$$

Potencijal φ ima isti predznak kao i naboj q (k>0 i r>0).

Ako polje potječe od n točkastih naboja, onda je potencijal u nekoj točki takvog polja:

$$\varphi = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i}$$

Ovdje se radi o algebarskom, a ne o vektorskom zbroju (kao kod jačine električnog polja koje potječe od n točkastih naboja-vidi prethodnu vezu sa kompjutertskim radom) jer je potencijal skalarna veličina.

Ako je naboj raspoređen na volumenima ili površinama onda izraz za potencijal glasi:

$$\varphi = k \cdot \int \frac{dq}{r}$$

GRADIJENT POTENCIJALA

Kad se točke a i b nalaze na infinitenzimalnom rastojanju onda iz jednadžbe (6) imamo:

$$d\varphi = -E\cos\theta ds \qquad (7)$$

tj.

$$-\frac{d\varphi}{ds} = E \cdot \cos\theta$$

Odnos $\frac{d\varphi}{ds}$ naziva se gradijent potencijala,a od prije znamo da je $E\cos\theta$ komponenta jačine električnog polja u pravcu ds.
Odavde slijedi da je komponenta jačine električnog polja u nekom pravcu jednaka negativnoj vrijednosti gradijenta potencijala u tom pravcu.

Matematički dodatak

Gradijent prostorne, neprekidne i derivabilne skalarne funkcije f(x,y,z) je vektor kojemu su komponente po x,y odn. z osi parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$
Taj vektor oznacavamo sa ∇f ili gradf.

$$\nabla f = \vec{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ su jedinični vektori u smjeru x, y i z osi.

Parcijalna derivacija funkcije f(x,y,z) po x: $\frac{\partial f}{\partial x}$ je derivacija funkcije f(x,y,z) po x uz stalan y i z.

Potencijal je funkcija istih svojstava kao i funkcija f.

Infinitenzimalni element pomaka $d\vec{s}$ možemo zapisati kao

$$d\vec{s}=\vec{i}\cdot dx+\vec{j}\cdot dy+\vec{k}\cdot dz$$

pa parcijalnim deriviranjem po x, y odn. z, možemo dobiti komponente električnog polja u smjeru x, y i z osi.

$$\vec{E}_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}$$

$$\vec{E}_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}$$

$$\vec{E}_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

ili

$$\vec{E}=\vec{E}_x+\vec{E}_y+\vec{E}_z=-(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})$$

pa je

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

Jednadžba

$$\varphi=-\int\vec{E}\,d\vec{s}$$

pokazuje kako iz jakosti električnog polja možemo izračunati potencijal , a gore izvedena jednadžba

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

omogućuje da iz raspodjele potencijala u prostoru, parcijalnim deriviranjem odredimo vektor jakosti električnog polja u nekoj točki tog polja.

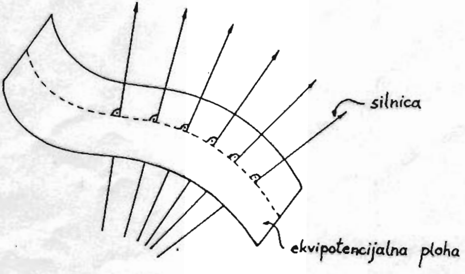
EKVIPOTENCIJALNE PLOHE

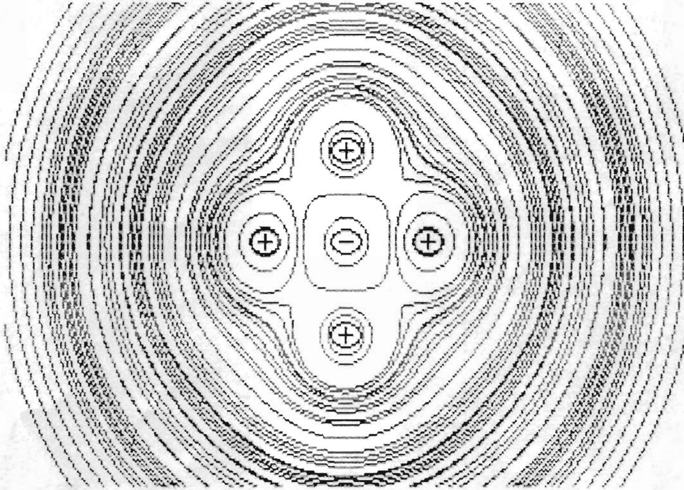
Raspodjela potencijala u nekom električnom polju može se predstaviti grafički pomoću ekvipotencijalnih ploha.Ekvipotencijalna ploha je ona ploha čije sve točke imaju isti potencijal.Ako sve točke plohe imaju isti potencijal onda naboj q' u svim točkama plohe ima istu potencijalnu energiju E_p pa za njegovo pomjeranje po plohi nije potreban nikakav rad.

To znači da se ekvipotencijalna ploha kroz neku točku mora nalaziti pod pravim kutem prema pravcu polja u toj točki.

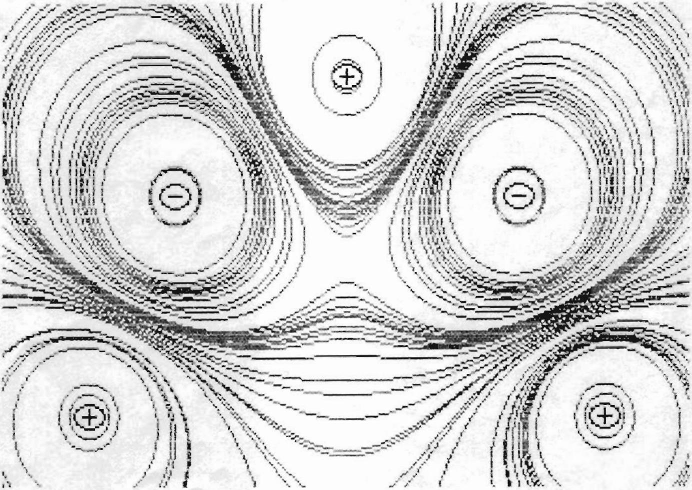
Kad to ne bi bilo tako, onda bi polje imalo komponentu koja leži na površini (ekvipotencijalnoj plohi) i morao bi se vršiti rad nasuprot električnih sila da bi se naboj q' pomjerao u pravcu ove komponente, dakle sve točke plohe tada ne bi imale istu potencijalnu energiju.

Ekvipotencijalne plohe su krive, zatvorene plohe koje uvijek zatvaraju neki naboj.
Ovdje treba napomenuti da je i slika silnica i slika ekvipotencijalnih ploha trodimenzionalna, ali su silnice krivulje u prostoru, dok su ekvipotencijalne plohe plohe u prostoru.

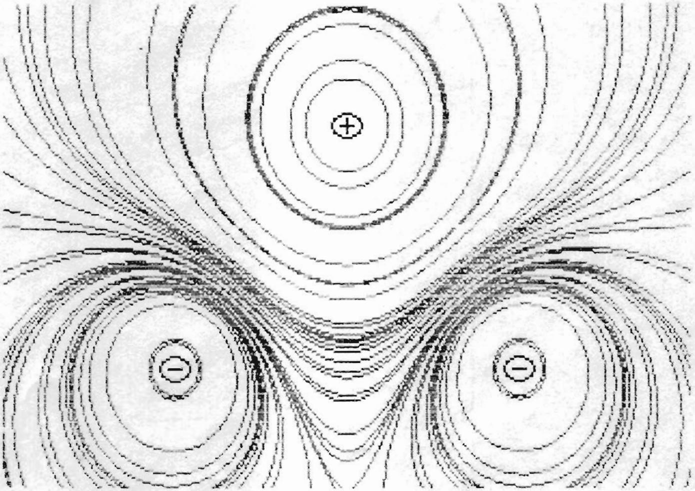


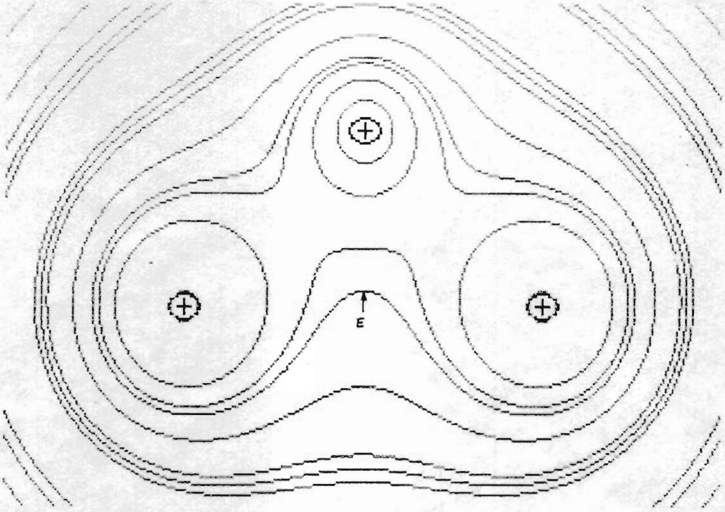


Što se više udaljujemo od naboja, ekvipotencijalne plohe su sve sličnije kružnicama.

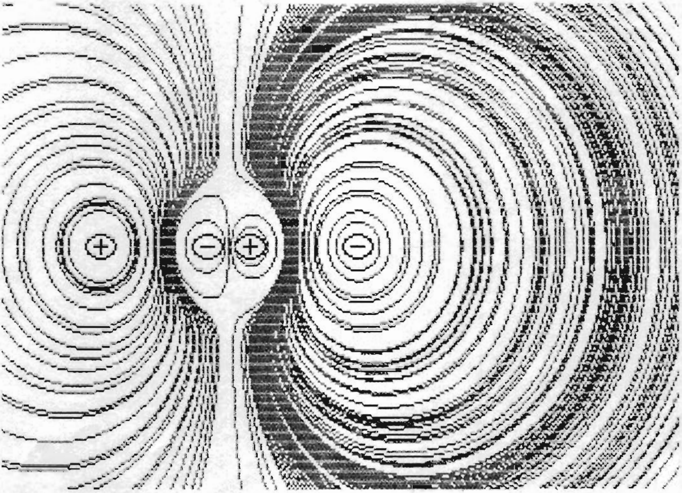


Karakteristični oblici deformiranih „piškota".

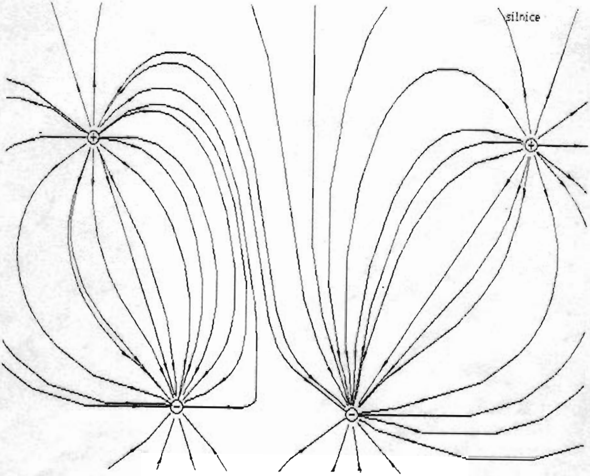




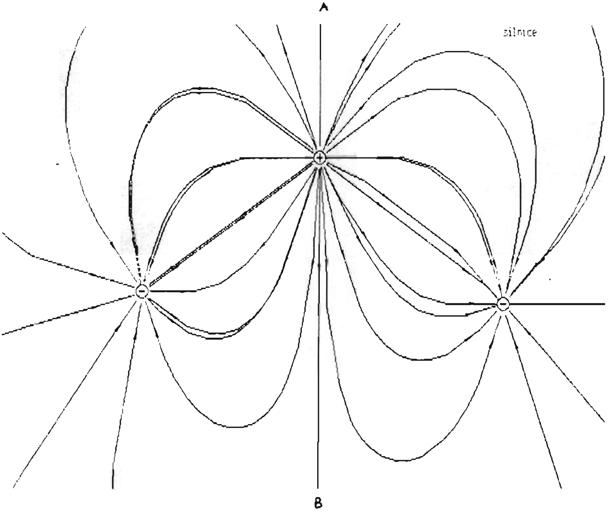
Ploha E, upr., zatvara sva tri „+" naboja.



Postoji procjep zbog nemogućnosti da se zatvore e. plohe oko dva istoimena naboja, uzrokovane specifičnim rasporedom naboja.



Silnice izviru iz „+" naboja, a završavaju u „-" nabojima ili u beskonačnosti.



„Leptir". Silnice A i B završavaju u beskonačnosti.

POPIS LITERATURE

1. Francis W. Sears; Elektricitet i magnetizam
2. Edward M. Purcell; Elektricitet i magnetizam
3. Tehnička enciklopedija
4. H. Meluzin; Elektrotehnika