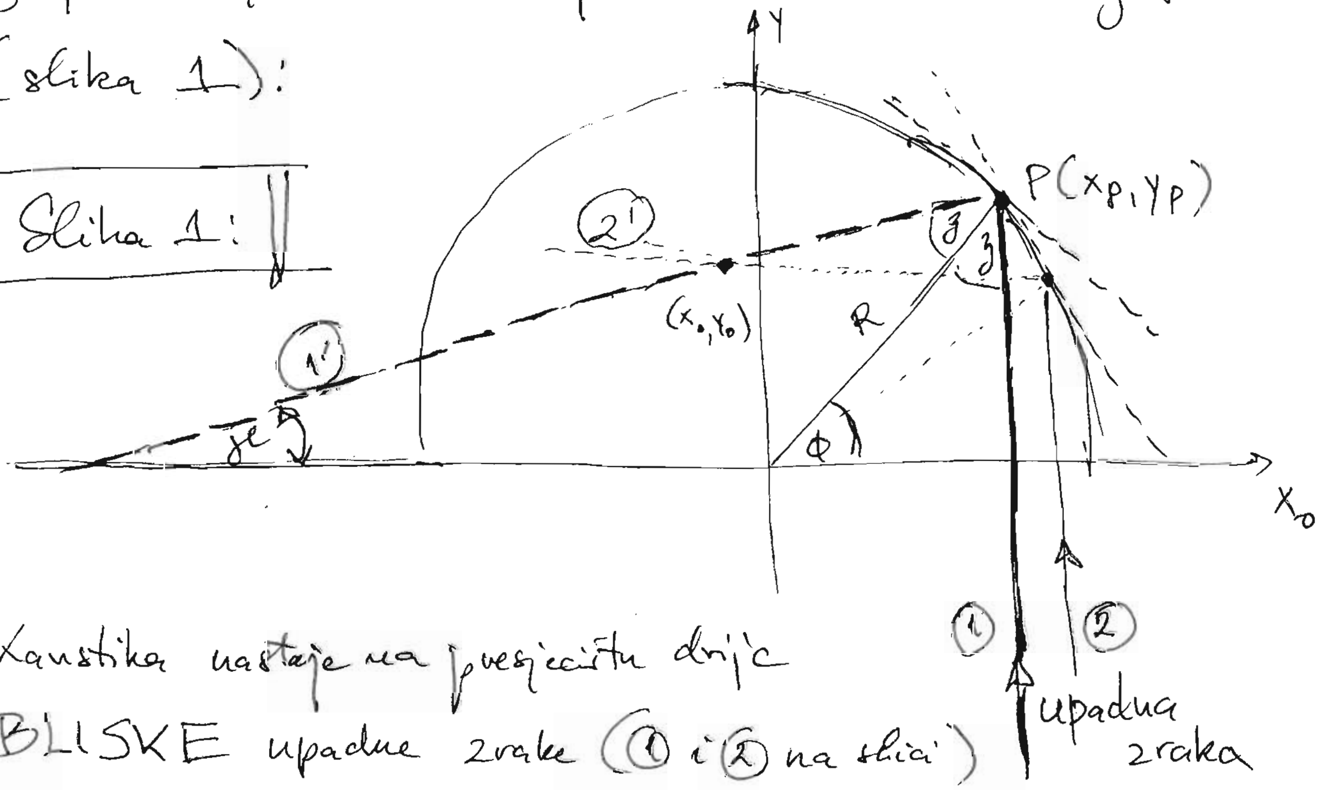
Izvod jednadžbe prstenove kaustike u prvom redu refleksije

Antonio Šiber, 03.09.2011.

Kaustika je krivulja koja nastaje u presjecištima reflektiranih zraka. Projicirajmo realnu situaciju u 2D i promotrimo gdje se sijeku zrake reflektirane od kružnog prstena (slika 1):

Slika 1:



Kaustika nastaje na presjecištu dvije BLISKE upadne zrake (1 i 2 na slici) kad se reflektiraju (1' i 2'), tj u točki (x_0, y_0)

Odredimo jdbu pravca 1': Njegov koeficijent smjera je

(1) $$a = \mathrm{tg}\,\chi = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right) = \mathrm{ctg}(2\zeta)$$ (vidi sliku 1), a odsječak,

$$b = y_P - a x_P = \underbrace{R\cos\zeta}_{y_P} - \mathrm{ctg}(2\zeta)\cdot\underbrace{R\cdot\sin\zeta}_{x_P} \quad (2)$$

Pravac 2' imat će INFINITEZIMALNO različite koeficijente jer su upadni pravci 1 i 2 infinitezimalno bliski.

Jednadžba presjecišta dva pravca dana kao

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

je:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \; ; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (*)$$

Kako su naši pravci infinitezimalno bliski to je $B_2 = B_1 + dB_1$, $A_2 = A_1 + dA_1$ i $C_2 = C_1 + dC_1$. U reprezentaciji pravca kao $y = ax + b$, $ax - y + b = 0$, vidimo da je $B_1 = -1$, odn. $dB_1 = 0$, pa se lako pokaže da je (razvijajući (*)):

$$\boxed{x_0 = -\frac{db}{da}}$$

Uvrštavajući (1) i (2) i provodeći diferencijaciju dobivamo da je

$$\boxed{x_0 = R(\sin z)^3 = \frac{R}{4}\left[3\sin z - \sin(3z)\right]}$$

(Za dobivanje ove jdbe potrebno je manipulirati zbrojem i umnoškom trigonometrijskih funkcija)

y_0 možemo dobiti ili iz (*) ili iz $y_0 = ax_0 + b$, što daje

$$\boxed{y_0 = \frac{R}{4}\left[3\cos z - \cos(3z)\right]}$$

Jednadžbu kaustike u <u>prvom</u> redu refleksije možemo izraziti i preko kuta ϕ. Tako dobivamo parametarsku jdbu kaustike u obliku:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0(\phi) &= \frac{R}{4}\left[3\cos\phi + \cos(3\phi)\right] \\ y_0(\phi) &= \frac{R}{4}\left[3\sin\phi + \sin(3\phi)\right] \end{aligned}}$$

Kaustika u prvom redu prikazana je na slici ispod.

(R=1)